第27卷 第5期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 5
2010年10月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0859-06

一类捕食模型椭圆方程解的稳定性*

查淑玲[1,2]， 李艳玲[2]， 郭改慧[3]

(1- 陕西师范大学数学与信息科学学院，西安 710062;
2- 渭南师范学院数学与信息科学系，渭南 714000; 3- 陕西科技大学理学院，西安 710021)

摘　要: 本文在Dirichlet边界条件下研究了一类带种内相食的捕食模型的平衡态问题。利用谱分析和分歧理论的方法，给出了发自半平凡解的局部分歧，得到了局部分歧解的结构。同时，利用线性算子的扰动理论，证明了该局部分歧正解是无条件稳定的。最后利用整体分歧理论，将局部分歧延拓为整体分歧，给出了分歧曲线随参数的整体走向。所得结果表明，当参数满足一定条件时，捕食者和被捕食者能够在给定区域内共存。

关键词: 特征值；分歧；稳定性

分类号: **AMS**(2000) 35K57　　**中图分类号**: O175.26　　**文献标识码**: A

1　引言

生物界中动物的种内相食现象屡见不鲜，种内相食是发生在同一物种间以本物种个体为食物的现象，对于带种内相食的捕食系统的研究在文献中出现较少，因此本文研究文献[1]带种内相食的反应扩散方程

$$\begin{cases} u_t = D_u\Delta u + ru(1-\frac{u}{K}) - \frac{nuv}{1+nhu}, \\ v_t = D_v\Delta v + \frac{bnuv}{1+nhu} - cv - \frac{nv^2}{1+nhu}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 Δ 代表Laplace算子，$u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 分别表示食饵和捕食者种群密度，以上参数均为正常数，其生物意义参见文献[1]。为了减少系统(1)所含参数的个数，假定扩散系数相等，令

$$\overline{u} = nhu, \quad \overline{v} = (na/r)v, \quad \overline{t} = (r/a)t, \quad d = ac/r, \quad m = nhK, \quad k = ab/(hr),$$

无量纲化后的方程简化为

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + au(1-\frac{u}{m}) - \frac{uv}{1+u}, \\ v_t = \Delta v + \frac{kuv}{1+u} - dv - \frac{v^2}{1+u}. \end{cases} \tag{2}$$

文献[1]主要通过分析得到了带有种内相食的捕食系统(2)图灵不稳定的条件，并使用数值模拟得到了不同条件下时空动力系统的图灵模式。本文将考虑系统(2)的平衡态问题非负解的存在性和稳定性。其平衡态方程为

$$\begin{cases} -\Delta u - au(1-\frac{u}{m}) + \frac{uv}{1+u} = 0, & x \in \Omega, \\ -\Delta v - \frac{kuv}{1+u} + dv + \frac{v^2}{1+u} = 0, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

收稿日期: 2009-05-07. **作者简介**: 查淑玲(1965年12月生)，女，副教授. 研究方向：微分方程及计算可视化.
***基金项目**: 国家自然科学基金(10971124)；渭南师范学院基金(10YKF016)；陕西省重点学科扶持项目.

2 准备知识

首先给出一些相关的基本结论。

设 $q(x)\in C(\overline{\Omega})$，线性特征值问题

$$-\Delta u+q(x)u=\lambda u,\quad x\in\Omega,\quad u=0,\quad x\in\partial\Omega$$

的所有特征值可排列为 $\lambda_1(q)<\lambda_2(q)\leq\lambda_3(q)\leq\cdots$，其中 $\lambda_1(q)$ 是单重的主特征值，且关于 $q(x)$ 严格单调递增[2]。简记 $\lambda_1=\lambda_1(0)$。

考虑非线性边值问题

$$-\Delta u=au(1-u/m),\quad x\in\Omega,\quad u=0,\quad x\in\partial\Omega. \tag{4}$$

由文献 [3,4] 知，当 $a>\lambda_1$ 时，方程 (4) 存在惟一正解，不妨记为 θ。易得 $0<\theta\leq m$。

利用极大值原理给出 (3) 非负解的一个先验估计。

引理 1 设 (u,v) 是 (3) 的一个非负解，则 $a>\lambda_1$ 且 $0\leq u\leq\theta,\ 0\leq v\leq k(1+m)$。

为方便叙述，下面引入一些记号：

$$C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})=\big\{u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}):u\,|_{\partial\Omega}=0\big\},\quad X=C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\times C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}),\quad Y=C^{\alpha}(\overline{\Omega}).$$

定义非线性算子 $F:\mathbf{R}\times X\to Y$，其中

$$F(d;u,v)=\Big(-\Delta u-au\Big(1-\frac{u}{m}\Big)+\frac{uv}{1+u},-\Delta v-\frac{kuv}{1+u}+dv+\frac{v^2}{1+u}\Big).$$

因 (3) 在平凡解 $(0,0)$ 处的线性化算子的所有特征值为 $\{\lambda_i-a\}\cup\{\lambda_i+d\}$。因此，可得到

引理 2[3] 当 $a>\lambda_1$ 时，$(0,0)$ 是不稳定的；当 $a<\lambda_1$ 时 $(0,0)$ 是渐近稳定的。

当 $a>\lambda_1$ 时，(3) 有半平凡解 $(\theta,0)$。设 (3) 在 $(\theta,0)$ 处的线性化算子为 L，经计算易得以下引理。

引理 3 当 $\lambda_1(-k\theta/(1+\theta))+d>0$ 时，半平凡解 $(\theta,0)$ 是渐近稳定的；当 $\lambda_1(-k\theta/(1+\theta))+d<0$ 时，半平凡解 $(\theta,0)$ 是不稳定的。

3 分歧解的存在性与稳定性

本节以 d 为分歧参数，讨论 (3) 发自半平凡解 $(\theta,0)$ 的分歧。易知 (u,v) 是算子方程 $F(d;u,v)=0$ 的解当且仅当 (u,v) 是 (3) 的解。

定理 1 设 $a>\lambda_1$。若 $\lambda_1(-k\theta/(1+\theta))<0$，则存在充分小的 $\delta>0$，使得对任意 $d\in(d_0-\delta,d_0+\delta)$，(3) 存在惟一的正解 $(u(s),v(s))$，且满足 $0<u(s)<\theta,\ 0<v(s)\,(0<s<\delta)$，其中 $d_0=-\lambda_1(-k\theta/(1+\theta))$。

证明 设 (3) 在 $(d;u,v)=(d_0;\theta,0)$ 处的线性化算子为 L_0，设 $N(L_0)$ 为核空间，$R(L_0)$ 为值域空间。因此

$$N(L_0)=\mathrm{span}\big\{(\varphi_1,\psi_1)^T\big\},\quad \mathrm{dim}N(L_0)=1,$$

其中 (φ_1,ψ_1) 满足

$$\begin{cases}-\Delta\varphi-a\varphi+\frac{2a\theta}{m}\varphi=-\frac{\theta}{1+\theta}\psi,\\ -\Delta\psi+d_0\psi-\frac{k\theta}{1+\theta}\psi=0.\end{cases} \tag{5}$$

ψ_1 是算子 $(-\Delta - k\theta/(1+\theta))$ 的主特征值对应的主特征函数，且满足

$$\int_\Omega \psi_1^2 \mathrm{d}x = 1, \quad \varphi_1 = \big(-\Delta - a + 2a\theta/m\big)^{-1}\big(-\theta\psi_1/(1+\theta)\big).$$

由广义极大值原理知 $\varphi_1 < 0$。

对 L_0 的伴随算子 L_0^* 有 $N(L_0^*) = \mathrm{span}\{(0,\psi_1)^T\}$。因此

$$R(L_0) = \Big\{(u,v)^T \in X : \int_\Omega v\psi_1 \mathrm{d}x = 0\Big\}, \quad \mathrm{codim}R(L_0) = 1.$$

设 $L_1 = F_{(d,u,v)}(d_0; u, v)$。因此 $L_1 \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (0, \psi_1)^T \notin R(L_0)$。

根据文献 [5] 中 Crandall-Rabinowitz 分歧定理，存在充分小 $\delta > 0$ 及 C^1 类函数 $\omega(s) : (-\delta, \delta) \to \mathbf{R}$, $(\varphi(s), \psi(s)) : (-\delta, \delta) \to X$，使得当 $0 < s < \delta$ 时

$$d(s) = d_0 + \omega(s), \quad u(s) = \theta + s\varphi_1 + s\varphi(s), \quad v(s) = s\psi_1(s) + s\psi(s)$$

是 $F(d; u, v) = 0$ 在 $(d_0; \theta, 0)$ 附近的惟一正解，即 $(u(s), v(s))$ 是 (3) 的正解，且满足

$$\omega(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \big(\varphi(s), \psi(s)\big)^T \in R(L_0).$$

下面给出分歧解的稳定性。由定理 1 的证明可知，0 是 L_0 的 i-单重特征值[4]。

由文献 [6,7] 知，存在两个分别定义在 d_0 和 0 邻域内的函数 $d \to (\gamma(d), \boldsymbol{S}(d))$ 和 $s \to (\eta(s), \boldsymbol{T}(s))$，使得

$$\big(\gamma(d_0), \boldsymbol{S}(d_0)\big) = \big(0, (\varphi_1, \psi_1)^T\big) = \big(\eta(0), \boldsymbol{T}(0)\big),$$

并且

$$F_{(u,v)}(d; \theta, 0)\boldsymbol{S}(d) = \gamma(d)\boldsymbol{S}(d), \quad |d - d_0| \ll 1,$$

$$F_{(u,v)}\big(d(s); u(s), v(s)\big)\boldsymbol{T}(s) = \eta(s)\boldsymbol{T}(s), \quad 0 < s \ll 1.$$

这里

$$\boldsymbol{S}(d) = \big(\omega_1(d), \omega_2(d)\big)^T, \quad \boldsymbol{T}(s) = \big(\chi_1(s), \chi_2(s)\big)^T,$$

而且 $\gamma'(d_0) \neq 0$，又若 $\eta(s) \neq 0\,(|s| \ll 1)$，则

$$\lim_{s\to 0} \frac{s d'(s)\gamma'(d_0)}{\eta(s)} = -1.$$

分歧解 $(u(s), v(s))$ 的稳定性由 $\eta(s)$ 确定。当 $\eta(s) > 0$ 时，$(u(s), v(s))$ 是稳定的；当 $\eta(s) < 0$ 时，$(u(s), v(s))$ 是不稳定的。

首先确定 $\gamma'(d_0)$ 的符号。由引理 3 知 $\gamma(d) = \lambda_1(-k\theta/(1+\theta)) + d$，故 $\gamma'(d_0) = 1$。

其次确定 $d'(s)$ 的符号。取 $d(s) = d_0 + \omega(s)$，只需确定 $\omega'(s)$ 的符号。将 $d(s)$ 及分歧解 $u(s), v(s)$ 代入 (3) 的第二个方程得

$$-\Delta v(s) - \frac{k u(s) v(s)}{1 + u(s)} + \big(d_0 + \omega(s)\big)v(s) + \frac{v^2(s)}{1 + u(s)} = 0. \tag{6}$$

两端同除以 s，再关于 s 在 $s = 0$ 处微分；两边同乘以 ψ_1 然后在 Ω 上积分，并利用 Green 公式得

$$\omega'(0) = \int_\Omega \frac{\psi_1^2(k\varphi_1 - (1+\theta)\psi_1)}{(1+\theta)^2} \mathrm{d}x.$$

由于 $\varphi_1 < 0$, $\psi_1 > 0$，故 $\omega'(0) < 0$，$d'(0) < 0$。从而当 $0 < s < \delta$ 时，$d'(s) < 0$, $\eta(s) > 0$。

定理 2 设定理 1 的条件成立，则由定理 1 确定的分歧解 $(u(s), v(s))\,(0 < s < \delta)$ 是渐近稳定的。

4 全局分歧

为了应用全局分歧理论，令$\omega=\theta-u$, $\chi=v$，则将$0\le\omega\le\theta$, $0\le\chi$代入(3)得

$$\begin{cases} -\Delta\omega=a\omega-\frac{2a\theta}{m}\omega+\frac{\theta}{1+\theta}\chi+F_1(\omega,\chi), \\ -\Delta\chi=-d\chi+\frac{k\theta}{1+\theta}\chi+F_2(\omega,\chi), \\ \omega=\chi=0. \end{cases} \tag{7}$$

记$\boldsymbol{F}(\omega,\chi)=(F_1,F_2)$，显然$\boldsymbol{F}$是连续函数，$\boldsymbol{F}(0,0)=0$且$\boldsymbol{F}$的Frechét导数$\boldsymbol{F}_{(\omega,\chi)}(0,0)=0$。在Dirichlet边界条件下，取$K$为算子$(-\Delta)$的逆算子，定义

$$\begin{aligned} T(d;\omega,\chi) \;=\; \Big(&aK\omega-\frac{2a}{m}K(\theta\omega)+K\Big(\frac{\theta}{1+\theta}\chi\Big)+KF_1(\omega,\chi), \\ &-dK\chi+K\Big(\frac{k\theta}{1+\theta}\chi\Big)+KF_2(\omega,\chi)\Big). \end{aligned}$$

记$G(d;\omega,\chi)=(\omega,\chi)-T(d;\omega,\chi)$，则当$0\le\omega\le\theta$, $0\le\chi$时，$G(d;\omega,\chi)=0$的解就是(7)的非负解，易见G是C^1函数且$G(d;0,0)=0$，所以$u=\theta-\omega$, $v=\chi$是(3)的非负解。令

$$K(d)(\omega,\chi)=\Big(aK\omega-\frac{2a}{m}K(\theta\omega)+K\Big(\frac{\theta}{1+\theta}\chi\Big),-dK\chi+K\Big(\frac{k\theta}{1+\theta}\chi\Big)\Big).$$

假定$\lambda\ge1$, $d_i(\lambda)$是问题$\lambda\Delta\chi+k\theta\chi/(1+\theta)=d\chi$的特征值，由变分原理，显然$d_i(\lambda)$关于$\lambda$在$[1,+\infty)$是递减的，且满足

$$-\infty\leftarrow\cdots\le d_3(\lambda)\le d_2(\lambda)<d_1(\lambda),\quad d_1(1)=d_0.$$

若λ是$K(d)$的特征值，对应的特征函数为(ω,χ)，则易得$\lambda\ge1$是$K(d)$的特征值当且仅当存在某个i，使得$d=d_i(\lambda)$。

定理3 在定理1的假设下，由$(d_0;\theta,0)$处产生的局部分支可以延拓成整体分支，且分歧曲线沿参数d到达无穷远处。

证明 假设$d>d_0$，则

$$d>d_0=d_1(1)\ge d_i(\lambda),\quad i=1,2,\cdots,$$

说明$K(d)$没有大于1的特征值，从而$\mathrm{index}(T(d,\cdot))=(-1)^0=1$。假设

$$d_0=d_1(1)>d>\max\{d_2(1),0\},$$

则$d>d_i(\lambda)$, $i=2,3,\cdots$。由于$\lim\limits_{\lambda\to\infty}d_1(\lambda)=-\infty$，故存在惟一的$\lambda>1$使得$d=d_1(\lambda_0)$，因此$K(d)$存在大于1的惟一特征值$\lambda_0$。

下面说明λ_0是$K(d)$的单重特征值，只需证明

$$N\big(\lambda_0I-K(d)\big)\cap R\big(\lambda_0I-K(d)\big)=\{0\}$$

即可[7]。从而$\mathrm{index}(T(d,\cdot))=(-1)^1=-1$。

由文献[6,8]中全局分歧理论可知，在$\mathbf{R}^+ \times X$中，$G(d;\omega,\chi)$存在过点$(d_0;0,0)$的连通分支C_0，且在$(d_0;0,0)$附近$G(d;\omega,\chi)=0$的所有正解都在该分歧曲线上。令C_1表示其最大连通分支，并定义

$$C_1 = C_0 - \big\{d(s),\, s\big(\varphi_1+\varphi(s)\big),\, s\big(\psi_1+\psi(s)\big) : -\delta < s < 0\big\},$$

则在分歧点$(d_0;0,0)$附近C_1包含曲线

$$\big\{d(s),\, s\big(\varphi_1+\varphi(s)\big),\, s\big(\psi_1+\psi(s)\big) : 0 < s < \delta\big\}.$$

令$C=\{(d;\theta-\omega,\chi):(d;\omega,\chi)\in C_1\}$，则$C$是(3)从$(\theta,0)$分歧出来的正解，且在$(d_0;\theta,0)$的小邻域内$C\subset P$，其中

$$P=\Big\{(d;u,v)\in R^+\times X : u,\,v>0,\, x\in\Omega,\, \frac{\partial u}{\partial n},\, \frac{\partial u}{\partial n}<0,\, x\in\partial\Omega\Big\},$$

并且分支C满足下列条件之一。

(i) C连接分歧点$(d_0;\theta,0)$到$(\hat{d};\theta,0)$，其中$\hat{d}\neq d_0$且$I-K(\hat{d})$不可逆；

(ii) C连接$(d_0;\theta,0)$沿着参数延伸至无穷；

(iii) C包含形如$(d;\theta-u,v)(d;\theta+u,-v)$的点，其中$u\not\equiv 0$，$v\not\equiv 0$。

下证(ii)成立。设$C-\{(d_0;\theta,0)\}\not\subset P$，则存在点$(\hat{d};\widehat{u},\widehat{v})\in C-\{(d_0;\theta,0)\}\subset\partial P$和序列$(d_n;u_n,v_n)\in C\cap P$，使得$n\to\infty$时$(d_n;u_n,v_n)\to(\hat{d};\widehat{u},\widehat{v})$。由极大值原理知，$\widehat{u}=0$或$\widehat{v}=0$。由于$(0,0)$非退化，则$(\widehat{u},\widehat{v})=(\theta,0)$。即当$n\to\infty$时$(d_n;u_n,v_n)\to(\hat{d};\theta,0)$。令$V_n=v_n/\|v_n\|_\infty$，则$V_n$满足

$$-\Delta V_n - \frac{ku_n}{1+u_n}V_n + d_nV_n + \frac{v_n}{1+u_n}V_n = 0, \quad x\in\Omega, \quad V_n=0, \quad x\in\partial\Omega. \tag{8}$$

由L^p估计和Sobelov嵌入定理，必存在一个收敛子列(仍记为V_n)使得$n\to\infty$时$V_n\to V$在$C_0^1(\overline{\Omega})$上成立，且$V\geq 0$，$V\not\equiv 0$，$x\in\overline{\Omega}$。因此，在(8)中令$n\to\infty$得

$$-\Delta V - \frac{k\theta}{1+\theta}V + \hat{d}V = 0, \quad x\in\Omega, \quad V=0, \quad x\in\partial\Omega.$$

由极大值原理得$V>0$。因此$\hat{d}=-\lambda_1(-k\theta/(1+\theta))=d_0$，与$\hat{d}\neq d_0$矛盾。因此$C-\{(d_0;\theta,0)\}\subset P$。由引理1中解的先验估计知，存在常数$M>0$，使得$\|u\|_\infty$，$\|v\|_\infty\leq M$。因此$C$在正锥$P$内只能沿参数$d$趋于无穷远处。

参考文献：

[1] Sun G Q, Zhang G, Jin Z, *et al.* Predator cannibalism can give rise to regular spatial pattern in a predator-prey system[J]. Nonlinear Dynamics, 2009, 58: 75-84

[2] Du Y H, Lou Y. Some uniqueness and exact multiplicity results for a predator-prey model[J]. Transaction of the American Mathematical Society, 1997, 349(6): 2443-2475

[3] Wu J H. Global bifurcation of coexistence state for the competition model in the chemostat[J]. Nonlinear Analysis, 2000, 39: 817-835

[4] Peng R, Wang M X. Uniqueness and stability of steady-states for a predator-prey model in heterogeneous environment[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2008, 136: 859-865

[5] Smoller J. Shock Waves and Reaction Diffusion Equations[M]. New York: Springer Verlag, 1999

[6] Wu J H, Wei G S. Coexistence states for cooperative model with diffusion[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2002, 43: 1277-1290

[7] Dancer E N. On positive solutions of some pairs of differential equations[J]. Transaction of the American Mathematical Society, 1984, 284: 729-743

[8] 郭改慧，李艳玲. 带Beddington-DeAngelis反应项的捕食-食饵模型的全局分支及稳定性[J]. 应用数学学报，2008, 31(2): 220-230
Guo G H, Li Y L. Global bifurcation and stability for the predator-prey model with B-D functional response[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2008, 31(2): 220-230

Stability of Bifurcation Solutions to an Elliptic Equation for a Class of Predator-prey Models

ZHA Shu-ling[1,2], LI Yan-ling[2], GUO Gai-hui[3]

(1- College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062;
2- Department of Mathematics and Information Sciences, Weinan Teacher College, Weinan 714000;
3- College of Science, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021)

Abstract: Under the Dirichlet boundary conditions, the steady-state problem for a predator-prey model with predator cannibalism is considered in this paper. By using the spectral analysis and the bifurcation theory, the local bifurcation emanting from the semitrivial solution is obtained, and the structure of positive solutions is given. At the same time, with the perturbation theorem to linear operators, we prove that the local coexistence solution is unconditionally stable. Finally, by using the global bifurcation theory, the local bifurcation is extended to the global one, and the direction of the global branch is also established. Our results show that when the parameters satisfy certain conditions, the predator and the prey will coexist in a given region.

Keywords: eigenvalue; bifurcation; stability

Received: 07 May 2009. **Accepted:** 25 Nov 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10971124); the Foundation of Weinan Teacher College (10YKF016); the Supported Key Scientific and Technological Subjects in Shaanxi Province.